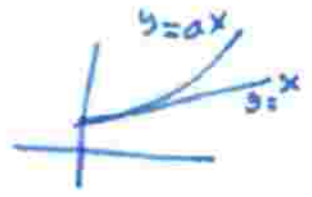
Limity posloupností - odhady

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n^{125}} = +\infty$ ~~Ukážeme, že lze najít [illegible], aby pro libovolné [illegible] ε [illegible].~~

Vezmeme obecně výraz $\dfrac{a^x}{x^k}$ $a>1$, $k\in N$

platí, že $a^x \geq x$ $\left\{ \right.$  $\left. \right\}$. pro libovolné kladné x. Zvolíme třeba $x=\dfrac{y}{k+1}$ y kladné.

Potom

$$a^{\frac{y}{k+1}} \geq \frac{y}{k+1} \qquad \Big/ \wedge\, k+1$$

$$a^y \geq \frac{y^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \qquad \Big/ : y^k$$

$$\frac{a^y}{y^k} \geq \frac{y}{\underbrace{(k+1)^{k+1}}_{\text{kladná konstanta}}} = \alpha\cdot y$$

Tj. máme odhadnuto, že $\alpha\cdot y \leq \dfrac{a^y}{y^k}$, tj. zpět do posloupnosti $\alpha\cdot n \leq \dfrac{a^n}{n^k}$. Ovšem $\alpha n \to \infty$ a tedy i $\dfrac{a^n}{n^k}\to\infty$. Tj. speciálně

$$\lim \frac{2^n}{n^{125}} = +\infty$$

- $\lim \dfrac{(-2)^n}{n} = \lim \underbrace{(-1)^n}_{\text{osciluje}} \cdot \underbrace{\dfrac{2^n}{n}}_{\text{jde k } +\infty}$

• $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n!}$ $\qquad a \in (1, +\infty)$

Rozepsaný zlomek: $\frac{a}{n} \cdot \frac{a}{n-1} \cdot \frac{a}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{1} \longrightarrow 0$

patrně. Důkaz?

Označme $k = [a]$, tj. celá část a. Pak

$$\underbrace{\frac{a}{n} \cdot \ldots \frac{a}{k+1}}_{\text{zlomky } < 1} \cdot \underbrace{\frac{a}{k} \cdot \ldots \frac{a}{1}}_{\text{zlomky } > 1}$$

$$\frac{a}{n} \cdot \underbrace{\left[\frac{a}{n-1} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{k+1}\right]}_{\text{Toto je číslo menší než 1}} \cdot \frac{a}{k} \cdots \frac{a}{1} \leq \frac{a}{n} \cdot 1 \cdot \frac{a^k}{k!} = \frac{1}{n} \underbrace{\frac{a^{k+1}}{k!}}$$

Toto číslo je pro dané a konstanta!

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{a^{k+1}}{k!} = C \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$$

a protože $\frac{a^n}{n!} \leq \frac{1}{n} \cdot C$, musí i $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ pro kladné a.

Lze využít i tvrzení, že $\lim\limits_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{a}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim \frac{a^n}{n!} = 0.$$

! Faktoriál roste rychleji než libovolná exponenciála

! Exponenciála roste rychleji než libovolný polynom (od určitého n_0).

%.

- $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = ?$

Víme, že pro $\forall n$ je $\sqrt[n]{n} > 1$. Potom lze říct, že

$$\sqrt[n]{n} = 1 + c_n$$

kde c_n je posloupnost kladných čísel.

$$\Rightarrow \quad n = (1+c_n)^n = \underbrace{1 + n \cdot c_n + \binom{n}{2} c_n^2 + \dots + \binom{n}{n-1} c_n^{n-1} + c_n^n}_{\text{Binomický rozvoj}}$$

Vynecháme vše kromě $\binom{n}{2} c_n^2$

$$n = (1+c_n)^n = \dots \geq \binom{n}{2} c_n^2 =$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$= \frac{n!}{2(n-2)!} c_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} c_n^2$$

$$\cancel{n} \geq \frac{\cancel{n}(n-1)}{2} c_n^2$$

$$c_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \qquad \text{Toto je odhad } c_n^2$$

$$c_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt[n]{n} = 1 + c_n \leq 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

Věta o dvou policajtech. $\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{2}{n-1}} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

• $\lim \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^n + 3^n}{-2(-1)^n \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{(-1)^n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{-2 \cdot (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} =$

$\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ... limita geometrické posloupnosti s kvocientem $q < 1$

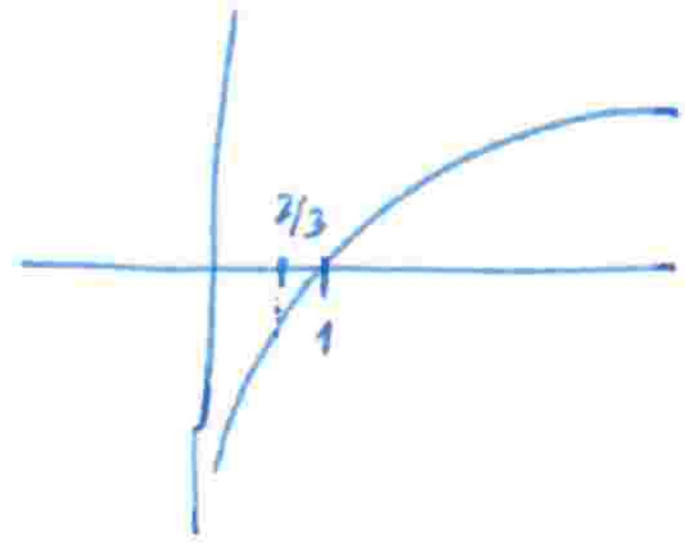
$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)(|a_n - a| < \varepsilon)$

Hledáme takové n, aby

$$\left|\left(\frac{2}{3}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon \quad / \log$$

$$n \cdot \log 2/3 < \log \varepsilon \Rightarrow |\cdot / \log 2/3$$



$$n > \underbrace{\frac{\log \varepsilon}{\log 2/3}}_{\text{kladné číslo, s klesajícím } \varepsilon \text{ roste.}}$$

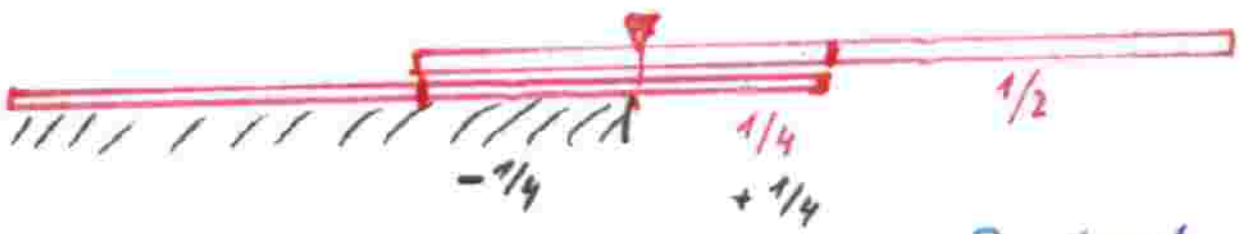
ε velmi malé $\Rightarrow \log \varepsilon < 0$.

O.K.

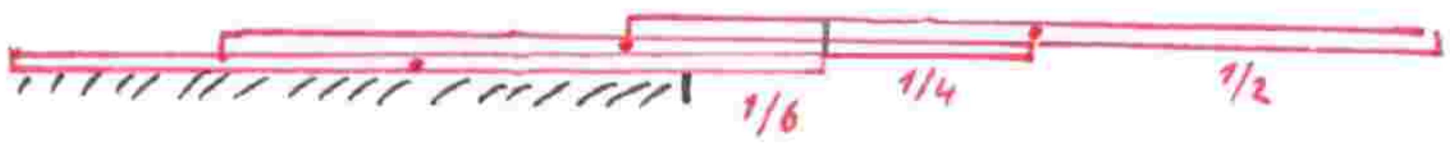
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\to 0}{\alpha_n} + 1}{\underset{\to 0}{\beta_n} + 3} = \frac{1}{3}$$

Kterak pomocí karet dosáhnout nekonečně daleko za stůl

1 karta : lze vysunout do půlky, tj. přesah je $L \times \frac{1}{2}$



2 karty : těžiště smí být nejvýše na okraji stolu, tj. posunout horní kartu lze o 1/4 L, spodní bude přesahovat o tuto délku a těžiště zůstane na okraji stolu.



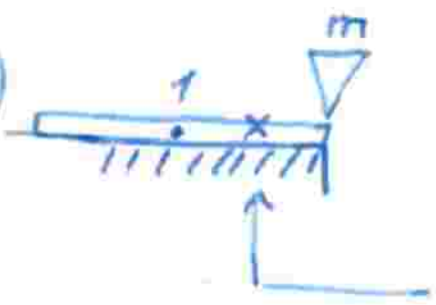
3 karty ...

Postup konstrukce

a)

Na stole je m karet, dohromady váží m jednotek a jejich těžiště leží na okraji stolu.

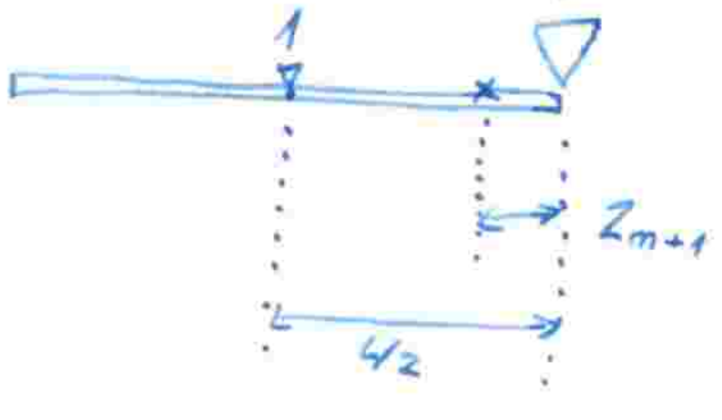
b)



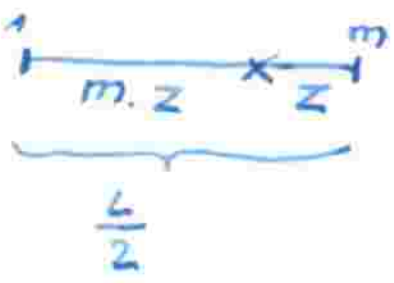
Vložíme pod ně další kartu tak, aby se stolem lícovala. Najdeme společné těžiště - spodní karta váží 1 jednotku.

c)

Posuneme spodní kartu tak, aby těžiště celé soustavy bylo opět na okraji stolu.



Aby platila "rovnováha na páce", musí



$$\frac{L}{2} = (m+1) \cdot z_{m+1}$$

$$\Rightarrow z_{m+1} = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{m+1}$$

Tento vzorec začíná pro $m = 0$ – to je jedna karta : $z = \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{0+1} = \frac{L}{2}$

Tj. celkový přesah je dán řadou

$$P_n = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{m+1} = \sum_{m=1}^{n} \frac{L}{2} \frac{1}{m} = \frac{L}{2} \cdot \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}$$

Dosah sloupce za stůl je tedy dán harmonickou řadou. Pro zajímavost – aby sloupec dosáhl za stůl o $10\,L$, bylo by třeba $n = 272\,400\,600$ karet.

Řada $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ ovšem diverguje a teoreticky je tedy možné dosáhnout libovolně daleko.

Součet harmonické řady

Řada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Důkaz pomocí:

B. – C. kritérium

a_n konverguje $\Leftrightarrow$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)(\forall p \in N)(\ |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon)$

$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ $\Longrightarrow$ $\left| a_{n+p} + a_{n+p-1} + a_{n+p-2} + \dots + a_n \right| < \varepsilon$

Zvolíme 1 ε a ukážeme, že to neplatí $\Rightarrow$ diverguje

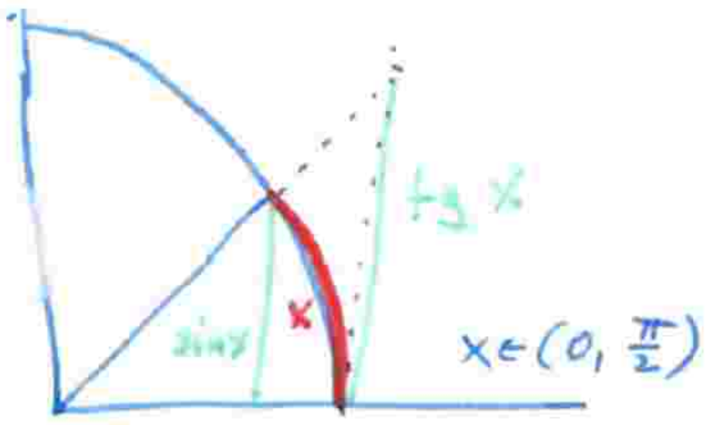
$\varepsilon = \frac{1}{2}$ $p = n$

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots \frac{1}{2n}}_{n_x} = \frac{1}{2}$$

Tj. pro tento případ je $|\ | > \varepsilon$.

Zvolili jsme nějaké ε a nějaké p a zjistili jsme, že ať už vezmeme jakékoliv n_0, stejně $|a_{n+p} - a_n|$ pod ε nedostaneme.

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$



$\sin x < x < \operatorname{tg} x$

$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x} \quad / : \sin x$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

pro $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ je samé, cosinus je sudá funkce

$\Rightarrow \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Limity spc. funkcí

- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$= \left\{ y = \frac{1}{x} \; ; \; y \to \pm\infty \right\} = \lim_{y \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}$

Toto připomíná limitu posloupnosti

$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e$

Tj. $\lim \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e$, $\alpha_n \to \infty$

pro $\forall \{\alpha_n\}_1^{\infty}$

pro $y \to +\infty$ pomocí Heineovy věty plyne, že

$\lim_{y \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} = \lim_{x \to 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = e$

Ještě $x \to 0-$, tj. $y \to -\infty$. $\quad \{ z = -y \; ; \; y \to -\infty \Rightarrow z \to +\infty \}$

$\left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-z} = \left(\frac{z-1}{z}\right)^{-z} = \left(\frac{z}{z-1}\right)^{z} = \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^{z-1} \cdot \left(\frac{z}{z-1}\right)$

$\lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^{z-1} \cdot \frac{z}{z-1} \xrightarrow{} 1 \quad = \lim_{z \to \infty} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^{z-1} =$

$= \lim_{z \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z} = e$

složená fce:
$z-1$ vnitřní
$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{z}$ vnější

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = \left\{ \begin{array}{l} \text{subs.} \\ y = e^x \quad y \to 1 \\ \ln y = x \end{array} \right\} = \lim\limits_{y\to 1} \dfrac{y-1}{\ln y} =$

$= \lim\limits_{y\to 1} \left(\dfrac{\ln y}{y-1}\right)^{-1} = 1^{-1} = 1$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x\cdot\ln a}-1}{x\cdot \ln a} \cdot \ln a \quad \left\{ \begin{array}{l} a^x = e^{x\cdot\ln a} \quad /\ln \\ x\cdot\ln a = x\cdot \ln a\cdot \ln e \\ 1 = 1 \end{array} \right\}$

$\cancel{\log_b x = \log_c x \cdot \log_b a} \qquad \cancel{\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b}$

$= \ln a \cdot \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{e^y-1}{y} = \ln a \cdot 1 = \ln a$

$\left\{ \begin{array}{l} y = x\cdot \ln a \\ x\to 0 \Leftrightarrow y \to 0 \end{array} \right\}$

$\Big\{$ • $\lim\limits_{x\to\alpha} e^x = e^\alpha$ a $\lim\limits_{x\to\alpha} \ln x = \ln \alpha$ přímo z Heineovy věty a definice obecné mocniny. $\Big\}$

Posloupnost $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ Definice Eulerova čísla

---

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 4x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} \cdot \dfrac{3x}{4x} = \dfrac{3}{4} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} =$

$= \left\{ \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \implies \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{\alpha x} = 1 \quad \text{pro } \alpha \in R - \{0\} \right\}$

$= \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{1} = \dfrac{3}{4}$

L'Hospital

$$\lim_{x \to a} \frac{F(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{F'(x)}{g'(x)}$$

Mají-li F i g v okolí a derivaci, g je na okolí a nenulová a platí $\lim_{x \to a} F(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$

pozn.: a může být i $\pm\infty$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \to 0} \sin ax = 0 \\ \lim_{x \to 0} \sin bx = 0 \end{array} \right\} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'} =$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{a \cdot \overbrace{\cos ax}^{\to 1}}{b \cdot \underbrace{\cos bx}_{\to 1}} = \frac{a}{b}$$

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \left\{ \begin{array}{l} x^n \to +\infty \\ e^{ax} \to +\infty \end{array} \right\} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{a \cdot e^{ax}} \overset{\text{znovu!}}{=}$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}}{a \cdot a \cdot e^{ax}} = \ldots = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{a^n \cdot e^{ax}} =$$
$$= \frac{n!}{a^n} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^{ax}} = 0$$

- $$\lim_{x \to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \to 1} \frac{\overbrace{x-1}^{\to 0} - \overbrace{\ln x}^{\to 0}}{\underbrace{(x-1) \cdot \ln x}_{\to 0}} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + (x-1) \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} =$$
$$= \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{1}{x+1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

• $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$

využijeme toho, že pro spojitou funkci platí

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Spočítáme limitu

$$\lim_{x\to 0} \ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\cdot \ln\frac{\sin x}{x} \overset{L'H.}{=}$$

Výraz typu $\frac{0}{0}$. Je třeba ukázat, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$!

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}\cdot\frac{x\cos x - \sin x}{\sin x}}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} \overset{L'H \frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2\cdot(2x\sin x + x^2\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\cdot\frac{x\cdot\sin x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{2\sin x + x\cdot\cos x} \overset{L'H \frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x} = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{\overbrace{\cos x}^{\to 1}}{\underbrace{3\cos x}_{\to 1} \underbrace{- x\cdot\sin x}_{\to 0}} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$$

pozn.: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x$ Rošime $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln -''- = \lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot \ln \frac{x+a}{x-a} =$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \frac{x+a}{x-a} \to 1}{\frac{1}{x} \to 0} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x-a-(x+a)}{(x-a)^2} \cdot \frac{x-a}{x+a}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2a}{(x-a)^2} \cdot \frac{x-a}{x+a}}{-\frac{1}{x^2}} = 2a \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{(x-a)(x+a)}}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= 2a \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-a^2} = 2a \implies \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x = e^{2a}$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$ L'Hospital je jedino dosti več definito...

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \lim \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2}\right) \to 1}{\frac{1}{x} \to 0} =$$

$$= \lim \frac{\frac{2x^3-2x(x^2+1)}{x^4} \cdot \frac{x^2}{x^2+1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim \frac{\frac{-2x}{x^2(x^2+1)}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim \frac{2x^3}{x^2(x^2+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

$$\implies \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = 1$$

- $\lim\limits_{x\to0+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to0+} \ln -''- = \lim \frac{\ln\cos\sqrt{x} \to 0}{x \to 0} =$$

$(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\overset{L'H}{=} \lim \frac{1}{\cos\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (-\sin\sqrt{x}) = -\frac{1}{2} \lim \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \overset{L'H}{=}$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{x\to0+} \frac{\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = -\frac{1}{2} \lim_{x\to0+} \frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}$$

$$\implies \lim_{x\to0+} (\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$