ZÁKLADNÍ VZORCE

- $\int (2+x^3)^2\,dx = \int (4 + 2x^3 + x^6)\,dx = 4x + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{7}x^7 + C$

  $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \Rightarrow \int x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

- $\int \frac{(1-x)^3}{x \cdot \sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{1-3x+3x^2-x^3}{x^{4/3}}\,dx = \int x^{-4/3} - 3x^{-1/3} + 3x^{2/3} - x^{5/3}\,dx =$

  $= \frac{1}{-1/3}x^{-1/3} - \frac{3}{2/3}x^{2/3} + \frac{3}{5/3}x^{5/3} - \frac{1}{7/3}x^{8/3} =$

  $= -3x^{-1/3} - \frac{9}{2}x^{2/3} + \frac{9}{5}x^{5/3} - \frac{3}{8}x^{8/3} + C$

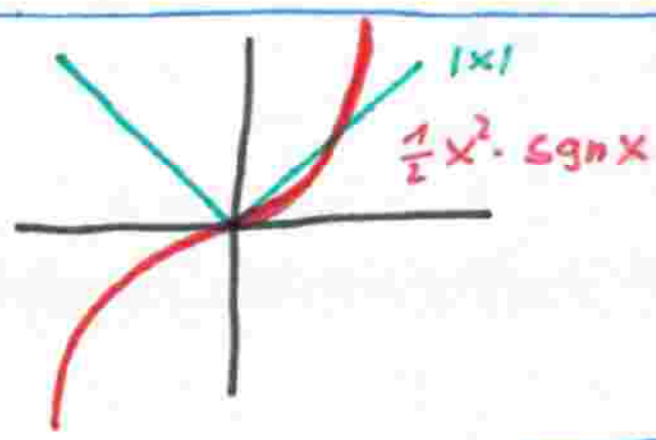
- $\int \frac{e^{3x}+1}{\underbrace{e^x+1}_{\text{vždy} > 0}}\,dx =$

  $$\begin{array}{l} x^3+1 : x+1 = x^2 - x + 1 \\ \underline{-x^3 - x^2} \\ \quad -x^2+1 \\ \quad \underline{-x^2+x} \\ \qquad x+1 \end{array}$$

  zk: $(x+1)(x^2-x+1) = x^3 - x^2 + x + x^2 - x + 1 = x^3+1$ ✓

  $= \int e^{2x} - e^x + 1\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C$

- $\int |x|\,dx = \begin{cases} x \geq 0 \ \ldots = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C \\ x < 0 \ \ldots = \int -x\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + C \end{cases}$



- $\int (x + |x|)^2\,dx = \int x^2 + 2x|x| + x^2\,dx = 2\int x^2 + x \cdot |x|$

  $= \left.\begin{cases} x < 0 \ \ldots = 2\int x^2 - x^2 = \emptyset + C = C \\ x \geq 0 \ \ldots = 4\int x^2 = \frac{4}{3}x^3 + C \end{cases}\right\} = \frac{2}{3}\left(x^3 + |x^3|\right)$

- $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\,dx$

  $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \sin y$
  $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

  $\left.\begin{array}{ll} a) & -\|- = \int \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}\right) + \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3} \\ b) & -\|- = \int \cos\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}\right) - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3} \end{array}\right\}$ SEČTEME

  $\Rightarrow 2\int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\,dx = \int \cos\frac{5x}{6} + \cos\frac{x}{6}\,dx$

  $\Rightarrow \int \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{3}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \sin\frac{5x}{6} + \frac{1}{2}\frac{6}{1}\sin\frac{x}{6} = \frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6} + C$

$\boxed{\text{ZOBECNĚNÍ:}}$

$$\int \cos ax \cdot \cos bx \, dx$$

a) $\text{-}''\text{-} = \int \cos(ax+bx) + \sin ax \cdot \sin bx \, dx$

b) $\text{-}''\text{-} = \int \cos(ax-bx) - \sin ax \sin bx \, dx$

$$2\int \cos ax \cdot \cos bx = \int \cos(ax+bx) + \cos(ax-bx) \, dx$$

$$\Rightarrow \int \cos ax \cdot \cos bx = \frac{1}{2}\int \cos(a+b)x + \cos(a-b)x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{a+b} \cdot \sin(a+b)x + \frac{1}{2}\frac{1}{a-b} \cdot \sin(a-b)x =$$

$$= \frac{(a-b)\sin(a+b)x + (a+b)\sin(a-b)x}{2(a^2-b^2)} + C =$$

$$= \frac{a\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right] + b\left[\sin(a-b)x - \sin(a+b)x\right]}{2(a^2-b^2)} + C =$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$= \frac{a \cdot 2 \cdot \sin ax \cdot \sin bx + b \cdot 2 \cdot \cos ax \cdot \sin -bx}{2(a^2-b^2)} + C =$$

$$= \frac{\sin bx \cdot (a \cdot \sin ax - b \cdot \cos ax)}{a^2-b^2} + C$$

- $\int \sin^2 x \cos \alpha x \, dx \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

a) $\alpha = 0$:

mizí $\cos \alpha x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\int \sin^2 x \, dx = \int 1 - \cos^2 x \, dx = \int 1 - [\cos 2x + \sin^2 x] \, dx =$$

$$= \int 1 - \cos 2x - \sin^2 x \, dx$$

$$\Longrightarrow 2 \int \sin^2 x \, dx = \int 1 - \cos 2x \, dx$$

$$\Longrightarrow \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int 1 - \cos 2x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x =$$

$$= \frac{2x - \sin 2x}{4} + C$$

b) $\alpha = \pm 2$:

vzorce pro $\cos 2x = \cos(-2x)$ známe

$$\int \sin^2 x \cos 2x \, dx = \int \sin^2 x \, (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx =$$

$$= \int \sin^2 x \left(\cos^2 x - 1 + \cos^2 x \right) dx = \int \sin^2 x \left(2\cos^2 x - 1 \right) dx =$$

$$= \int 2 \sin^2 x \cos^2 x \underbrace{- \sin^2 x \, dx}_{\text{viz předchozí případ}} = \int \frac{1}{2} \left(2 \sin x \cos x \right)^2 dx - \frac{2x - \sin 2x}{4} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin^2 2x \, dx - \frac{2x - \sin 2x}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot (2x) - \sin 2 \cdot (2x)}{4} - \text{-}\!\text{//}\!\text{-} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{4x - \sin 4x}{4} - \frac{2x - \sin 2x}{4} = \frac{4 \cdot \sin 2x - \sin 4x - 4x}{16} + C$$

Pozn.: kdybychom rovnou integrovali obecně, tyto dvě podmínky ($\alpha \neq 0$, $|\alpha| \neq 2$) by na nás určitě někde vyskočily.

Tj. je zde indicie: v obecné integraci se asi někde vyskytnou výrazy $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha + 2}$ a $\frac{1}{\alpha - 2}$.

OBECNĚ:

$$\sin^2 x \cdot \cos\alpha x = \sin x \cdot \underbrace{\sin x \cdot \cos\alpha x}_{\sin x\cdot\cos y = \sin(x+y) - \sin y\cos x} = \sin x\left[\sin(\alpha+1)x - \sin\alpha x\cdot\cos x\right] =$$

$$= \underbrace{\sin x\cdot\sin(\alpha+1)x}_{\sin x\sin y = \cos x\cos y - \cos(x+y)} - \underbrace{\sin x\cdot\sin\alpha x}_{\sin x\cdot\sin y = \cos(x-y) - \cos x\cdot\cos y}\cdot\cos x =$$

$$= \cos x\cdot\cos(\alpha+1)x - \cos(\alpha+2)x - \cos x\left[\cos(\alpha-1)x - \cos x\cos\alpha x\right] =$$

$$= \cos x\cdot\cos(\alpha+1)x - \cos x\cdot\cos(\alpha-1)x - \cos(\alpha+2)x + \underbrace{\cos^2 x}_{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}\cos\alpha x =$$

$$= \cos x\cdot\cos(\alpha+1)x - \cos x\cdot\cos(\alpha-1)x - \cos(\alpha+2)x + \cos\alpha x - \sin^2 x\cdot\cos\alpha x$$

$\Rightarrow$

$$2\cdot\sin^2 x\cos\alpha x = \cos x\cdot\cos(\alpha+1)x - \cos x\cdot\cos(\alpha-1)x - \cos(\alpha+2)x + \cos\alpha x$$

Tento typ integrálu už jsme počítali:

$$\int\cos ax\cdot\cos bx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a+b}\cdot\sin(a+b)x + \frac{1}{2}\frac{1}{a-b}\sin(a-b)x$$

c) $$\int\sin^2 x\cos\alpha x = \frac{1}{2}\cdot\Big[\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha+2}\cdot\sin(\alpha+2)\cdot x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-\alpha}\sin(-\alpha x)}_{a=1\quad b=\alpha+1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\sin\alpha x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2-\alpha}\cdot\sin(2-\alpha)x}_{a=1\quad b=\alpha-1} - \frac{\sin(\alpha+2)x}{(\alpha+2)} + \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\Big] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha+2)x}{\alpha+2} + \frac{\sin\alpha x}{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{\alpha-2}\sin(\alpha-2)x - \frac{\sin(\alpha+2)x}{\alpha+2} + \frac{\sin\alpha x}{\alpha}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\cdot\frac{\sin\alpha x}{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha-2)x}{\alpha-2} - \frac{1}{2}\frac{\sin(\alpha+2)x}{\alpha+2}\right] =$$

$$= \frac{\sin(\alpha-2)x}{4(\alpha-2)} - \frac{\sin(\alpha+2)x}{4(\alpha+2)} + \frac{\sin\alpha x}{\alpha} + C \qquad \text{pro } \alpha\neq 0,\ \alpha\neq\pm 2$$

Výrazy $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha-2}$ a $\frac{1}{\alpha+2}$ se tu opravdu vyskytly.

Racionální Fce

- $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}\,dx$

Rozložíme výraz na parciální zlomky:

$$\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} = \frac{Ax+5A+Bx-2B}{(x-2)(x+5)}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} A+B&=2 \\ 5A-2B&=3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A+B&=2 \\ 7A&=7 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} A&=1 \\ B&=1 \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \int \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5}\,dx = \ln(x-2) + \ln(x+5) =$$

$$= \ln\left[(x-2)\cdot(x+5)\right] + C$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{x^2+2x+1}\,dx$

Předchozí racionální fce byla tzv. "ryze lomená", protože polynom v čitateli měl menší stupeň než polynom ve jmenovateli. Zde tomu tak není a polynomy musíme nejprve vydělit, abychom mohli aplikovat předchozí trik:

$$\begin{array}{l} x^2-x+4 \\ \underline{-x^2-2x-1} \\ \quad -3x+3 \end{array} \quad : (x^2+2x+1) = 1 + \frac{-3x+3}{x^2+2x+1} = 1 + \frac{-3x+3}{(x+1)^2} =$$

$$= 1 - 3\,\underbrace{\frac{x-1}{(x+1)^2}}_{\text{zkusíme rozložit}}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} A&=1 \\ A+B&=-1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} A&=1 \\ B&=-2 \end{aligned}$$

Zk.: $\ldots = \frac{x+1-2}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{(x+1)^2}$ ✓

$$\int \frac{x^2-x+4}{x^2+2x+1}\,dx = \int 1 - \frac{3}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2}\,dx = x - 3\ln(x+1) + 6\cdot\frac{-1}{x+1} =$$

$$= x - \frac{6}{x+1} - 3\cdot\ln(x+1) + C$$

Obecný rozklad na parciální zlomky

a) Mocnina ve jmenovateli musí být menší než mocnina v čitateli

b) **Jmenovatel** převedeme na tvar $a \cdot (x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_p)^{k_p} \cdot (ax^2+bx+c)\cdot(\dots)\dots$

c) Je-li ve jmenovateli výraz $(x-x_0)$, odpovídá mu v rozkladu $\frac{A}{x-x_0}$

d) Je-li ve jmenovateli výraz $(x-x_0)^k$ $k>1$, odpovídá mu v rozkladu

$$\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\frac{A_3}{(x-x_0)^3}+\dots+\frac{A_k}{(x-x_0)^k}$$

e) Je-li ve jmenovateli výraz ax^2+bx+c se záporným diskriminantem, odpovídá mu v rozkladu výraz

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

- $\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx$

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2}+\frac{E}{(x+1)^3}=$$

$$=\frac{A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2(x+1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2}{(x-1)^2(x+1)^3}$$

Výsledná soustava by byla nesmírně komplikovaná a pracná na řešení. Při hledání koeficientů ale lze do rovnosti

$$x=A(x-1)(x+1)^3+B(x+1)^3+C(x-1)^2(x+1)^2+D(x-1)^2(x+1)+E(x-1)^2$$

Dosazovat kořeny a práci si tak zjednodušit.

$X = 1: \quad 1 = B(1+1)^3 \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{8}$

$X = -1: \quad -1 = E(-1-1)^2 \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{1}{4}$

$$X - \frac{(x+1)^3}{8} + \frac{(x-1)^2}{4} = A(x-1)(x+1)^3 + C(x-1)^2(x+1)^2 + D(x-1)^2(x+1)$$

$$\frac{1}{8}\left[8x - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + 2x^2 - 4x + 2\right] = A(x-1)(x^3+3x^2+3x+1) + C(x^2-1)^2 + D(x^2-2x+1)(x+1)$$

$$\frac{1}{8}\left[-x^3 - x^2 + x + 1\right] = A\left[x^4 + 2x^3 - 2x - 1\right] + C\left[x^4 - 2x^2 + 1\right] + D\left[x^3 - x^2 - x + 1\right]$$

$$\begin{aligned}
x^4)&\quad A + C = 0\\
x^3)&\quad 2A + D = -\tfrac{1}{8}\\
x^2)&\quad -2C - D = -\tfrac{1}{8}\\
x^1)&\quad -2A - D = \tfrac{1}{8}\\
x^0)&\quad -A + C + D = \tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

závislé

$$\begin{aligned}
A + C &= 0\\
2A + D &= -\tfrac{1}{8}\\
-2C - D &= -\tfrac{1}{8}\\
-A + C + D &= \tfrac{1}{8}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
A + C &= 0\\
2A + D &= -\tfrac{1}{8}\\
A - C - D &= -\tfrac{1}{8}\\
-A + C + D &= +\tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

závislé

2 rovnice byly závislé, což je dobře, jinak by soustava neměla řešení a někde by byla chyba

$$\begin{aligned}
A + C &= 0\\
2A + D &= -\tfrac{1}{8}\\
A - C - D &= -\tfrac{1}{8}
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
A + C &= 0\\
2A + D &= -\tfrac{1}{8}\\
2A - D &= -\tfrac{1}{8}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad D = 0$$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{1}{16} \qquad C = \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{1}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{1}{16(x+1)} - \frac{1}{4(x+1)^3}$$

Pozn.: zkoušku sami

$$\int \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}\,dx = -\frac{\ln|x-1|}{16} - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{\ln|x+1|}{16} + \frac{\frac{1}{2}}{4(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{16}\left[\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{(x+1)^2}\right] + C$$

$$\int \frac{x}{x^8-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Nejprve si zjednodušíme život substitucí} \\ y = x^2 \\ dy = 2x \cdot dx \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{y^4-1}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(y^2-1)(y^2+1)}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(y+1)(y-1)(y^2+1)}\,dy$$

$$\frac{1}{(y+1)(y-1)(y^2+1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} + \frac{Cy+D}{y^2+1} =$$

$$= \frac{A(y-1)(y^2+1) + B(y+1)(y^2+1) + (y^2-1)(Cy+D)}{(y+1)(y-1)(y^2+1)}$$

Srovnáme čitatele a postupně dosadíme kořeny

$y=1)\quad 1 = B(1+1)(1+1) \Rightarrow B = \frac{1}{4}$

$y=-1)\quad 1 = A(-1-1)(1+1) \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$

$y=+i)\quad 1 = (i^2-1)(Ci+D) \Rightarrow -\frac{1}{2} = Ci+D$

$y=-i)\quad 1 = ((-i)^2-1)(-Ci+D) \Rightarrow -\frac{1}{2} = -Ci+D$

$-1 = 2D \Rightarrow D = -\frac{1}{2}$

$0 = 2Ci \Rightarrow C = 0$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{y^4-1}\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{1}{4(y+1)} - \frac{1}{4(y-1)} - \frac{1}{2(y^2+1)}\,dy =$$

$$= \frac{1}{8}\ln|y+1| - \frac{1}{8}\ln|y-1| - \frac{1}{4}\operatorname{arctg} y =$$

$$= \ln\left|\frac{y+1}{y-1}\right|^{1/8} - \frac{\operatorname{arctg} y}{4} = \ln\left|\frac{x^2+1}{x^2-1}\right|^{1/8} - \frac{\operatorname{arctg} x^2}{4} + C$$

- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x = tg\,\varphi \\ dx = \frac{1}{\cos^2\varphi}\,d\varphi \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2\varphi}}{1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi =$

$= \int \frac{\frac{\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \int d\varphi = \varphi \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = arctg\,x + C$

Tabulková derivace: $arctg'x = \frac{1}{1+x^2}$

SUBSTITUCE

- $\int x(1-x^2)^6\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 \\ dy = 2x\,dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int (1-y)^6\,dy =$

$= \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{5}(1-y)^5 = -\frac{(1-x^2)}{10} + C$

- $\int \frac{1}{x^2}\cdot \sin\frac{1}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ dy = -\frac{1}{x^2}\,dx \end{array} \right\} = -\int \sin y\,dy =$

$= \cos y = \cos\frac{1}{x} + C$

- $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \cos x \\ dy = -\sin x\,dx \end{array} \right\} = -\int \frac{1}{y^{3/2}}\,dy =$

$= -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot y^{-\frac{1}{2}} = 2y^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C$

- $\int \frac{1}{1-\sin x}\,dx = \int \frac{1+\sin x}{(1-\sin x)(1+\sin x)}\,dx = \int \frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}\,dx =$

$= \int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx =$

$= \operatorname{tg} x + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} y = \cos^2 x \\ dy = -\sin x\,dx \end{array} \right\} = \operatorname{tg} x - \int \frac{dy}{y^2} =$

$= \operatorname{tg} x + \frac{1}{y} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} + C$

Pozn.: v bodech $x = \frac{2k\pi+\pi}{2}$; $k \in \mathbb{Z}$ má funkce nespojitosti (neomezeně roste). Výpočet platí vždy jen na intervalu $\left(\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+3}{2}\pi\right)$

per partes

- $\int \ln x = \int 1 \cdot \ln x = \left\{ \begin{matrix} F' = 1 & F = x \\ g = \ln x & g' = \frac{1}{x} \end{matrix} \right\} =$

$= x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \ln x - x = x(\ln x - 1) + C$

- $\int x^2 \cdot e^{-2x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} F' = e^{-2x} & F = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ g = x^2 & g' = 2x \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \int x \cdot e^{-2x} =$

$= \left\{ \begin{matrix} F' = e^{-2x} & F = -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ g = x & g' = 1 \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} \mp \frac{1}{2}xe^{-2x} \mp \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx =$

$= -\frac{1}{2}x^2e^{-2x} + \frac{1}{2}xe^{-2x} \mp \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-2x} + C =$

$= -\frac{1}{2}e^{-2x}\left(x^2 \mp x \mp \frac{1}{2}\right) + C$

- Odvoďte rekurentní vztah pro $I(n) = \int x^n \cdot \sin x\,dx$

a) $n = 1$: $\int x \cdot \sin x\,dx = \left\{ \begin{matrix} F' = \sin x & F = -\cos x \\ g = x & g' = 1 \end{matrix} \right\} = -x \cdot \cos x + \int \cos x\,dx =$

$= -x \cdot \cos x + \sin x$

b) $n = 2$: $\int x^2 \cdot \sin x = \left\{ \begin{matrix} F' = \sin x & F = -\cos x \\ g = x^2 & g' = 2x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cdot \cos x + 2\int x \cdot \cos x =$

$= \left\{ \begin{matrix} F' = \cos x & F = \sin x \\ g = x & g' = 1 \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2x\sin x - \int \sin x =$

$= -x^2 \cos x + 2x \cdot \sin x + \cos x$

Per partes

c) $I(n) = \int x^n \sin x \, dx = \left\{ \begin{matrix} F' = \sin x & F = -\cos x \\ g = x^n & g' = n x^{n-1} \end{matrix} \right\} = -x^n \cdot \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, dx =$

$= \left\{ \begin{matrix} F' = \cos x & F = \sin x \\ g = x^{n-1} & g' = (n-1) x^{n-2} \end{matrix} \right\} =$

$= -x^n \cdot \cos x + n \left[x^{n-1} \cdot \sin x - (n-1) \int x^{n-2} \sin x \, dx \right] =$

$= -x^n \cdot \cos x + n \cdot x^{n-1} \cdot \sin x - n \cdot (n-1) \cdot I(n-2)$

- $\int \sin^2 x \, dx = \left\{ \begin{matrix} F' = \sin x & F = -\cos x \\ g = \sin x & g = \cos x \end{matrix} \right\} = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x =$

$= -\sin x \cos x + \int 1 - \sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow \quad 2 \int \sin^2 x \, dx = x - \sin x \cos x \Rightarrow$

$\int \sin^2 x \, dx = \dfrac{2x - \sin 2x}{4} + C$

- $\int x \cdot \sin^2 x \, dx = \left\{ \begin{matrix} F' = \sin^2 x & F = \frac{2x - \sin 2x}{4} \\ g = x & g' = 1 \end{matrix} \right\} = x \cdot \dfrac{2x - \sin 2x}{4} - \int \dfrac{2x - \sin 2x}{4} dx =$

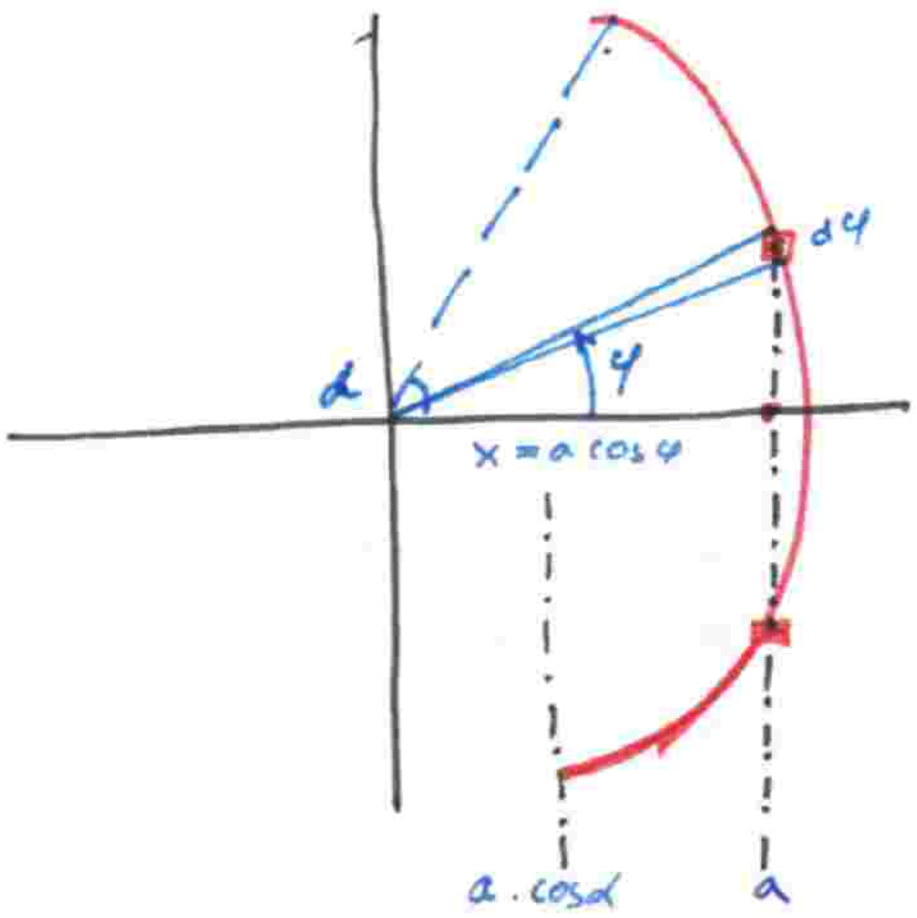
$= \dfrac{2x^2 - x \cdot \sin 2x}{4} - \frac{1}{4} \int 2x dx + \frac{1}{4} \int \sin 2x \, dx =$

$= \dfrac{2x^2 - x \cdot \sin 2x}{4} - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{8} \cos 2x + C =$

$= \dfrac{2x^2 - 2x \cdot \sin 2x - \cos 2x}{8} + C$

FYZIKÁLNÍ APLIKACE

• Určete souřadnice těžiště oblouku $x = a\cos\varphi$ $y = a\sin\varphi$ $|\varphi| \le \alpha \le \pi$



$$x = a\cdot\cos\varphi$$
$$y = a\cdot\sin\varphi$$

celý oblouk $-\alpha \le \varphi \le \alpha$ váží M. Výsek $d\varphi$ váží poměrnou část, tj.

$$dm = M\cdot\frac{d\varphi}{2\alpha}$$

$$\vec{x}_T = \frac{\sum m_i \vec{x}_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{x}_i$$

Máme kontinuum, takže sčítání přes konečný počet HB se nahrazuje integrací.

Problém je zdánlivě 2D, díky symetrii oblouku ale těžiště vždy leží na ose x.

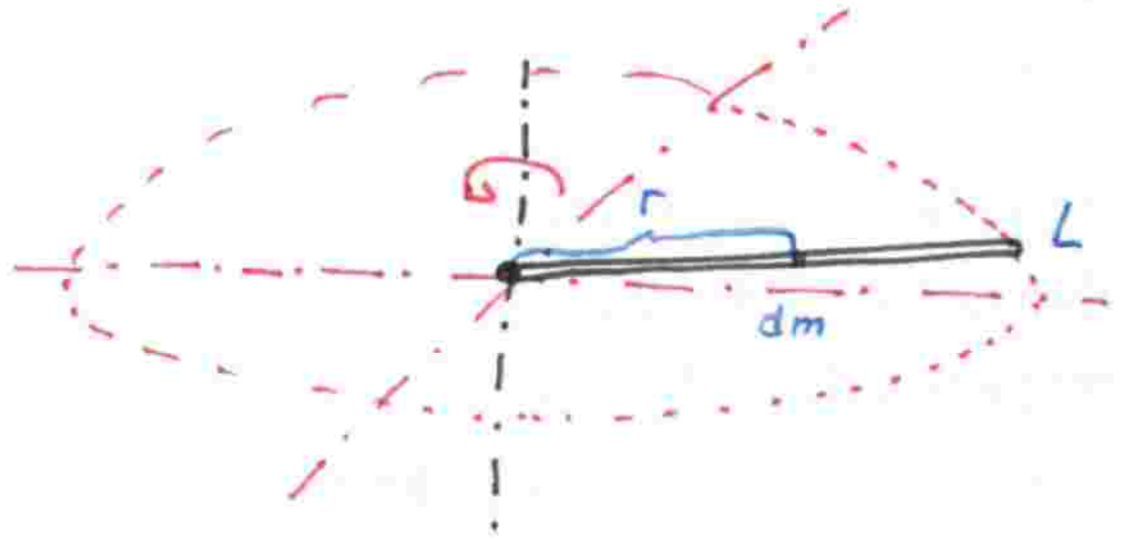
$$x_T = \frac{1}{M}\cdot\int r\cdot 2\cdot dm = \frac{2}{M}\int r\cdot M\frac{d\varphi}{2\alpha} = \frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha a\cos\varphi\, d\varphi$$
$$= \frac{a}{\alpha}\int_0^\alpha \cos\varphi\, d\varphi = \frac{a}{\alpha}\left[\sin\varphi\right]_0^\alpha = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\alpha}$$

pozn.: • pro malý oblouk $\alpha \to 0$ jde $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 1$ a tedy $x_T \to a$.

• pro celý kruh pak $\alpha \to \pi$ jde $\frac{\sin\alpha}{\alpha} \to 0$ a tedy $x_T \to 0$ což sedí.

• Tyč délky L upevněná na jednom konci rotuje kolem tohoto konce s frekvencí ω. Jaká síla působí v bodě upevnění, jestliže délková hustota tyče je σ?

FYZ. AP.



$a_o = \frac{v^2}{r}$ $\qquad F = m.a$

rychlost bodu ve vzd. r od počátku

$v(r) = \omega . r$

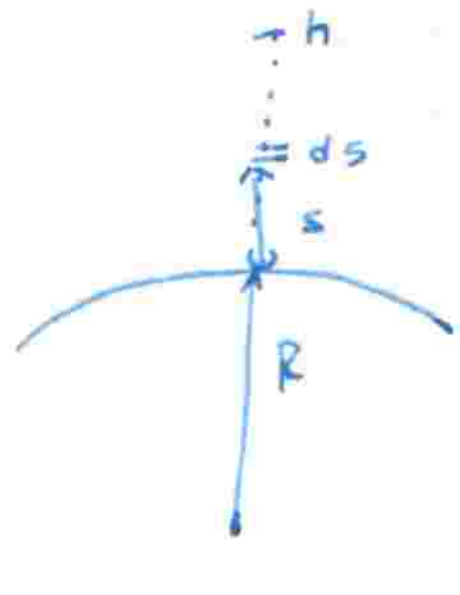
$$\Rightarrow \quad dF = dm . \frac{v^2(r)}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r}$$

$$dm = \sigma . dr$$

$$\Rightarrow \quad dF = \sigma \omega^2 r \, dr$$

$$F = \int_0^L \sigma \omega^2 r \, dr = \sigma\omega^2 \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^L = \frac{1}{2}\sigma\omega^2 L^2$$

• Jaká práce se vykoná, zvedneme-li těleso o hmotnosti m z povrchu země poloměru R do výšky h? Jaká práce se vykoná, vzdálíme-li těleso do nekonečna?



$F = \varkappa \frac{Mm}{r^2}$ $\qquad$ práce $\qquad W = F.s$

zde síla závisí na poloze a musíme tedy použít $\int$

$$dW = F(s).ds = \varkappa \frac{Mm}{s^2} . ds$$

$$W = \int_R^{R+h} \varkappa \frac{Mm}{s^2} ds = \varkappa Mm . \int_R^{R+h} \frac{ds}{s^2} = \varkappa Mm \cdot \left[-\frac{1}{s}\right]_R^{R+h} =$$

$$= \varkappa Mm \left(-\frac{1}{R+h} + \frac{1}{R}\right) = \varkappa Mm \frac{-R+R+h}{R(R+h)} = \varkappa Mm \frac{h}{R \cdot (R+h)} =$$

$\left\{ \text{Pozn.: } F_g = m.g \Rightarrow g = \frac{\varkappa M}{R^2} \right\}$ $= g.m.\frac{Rh}{R+h}$

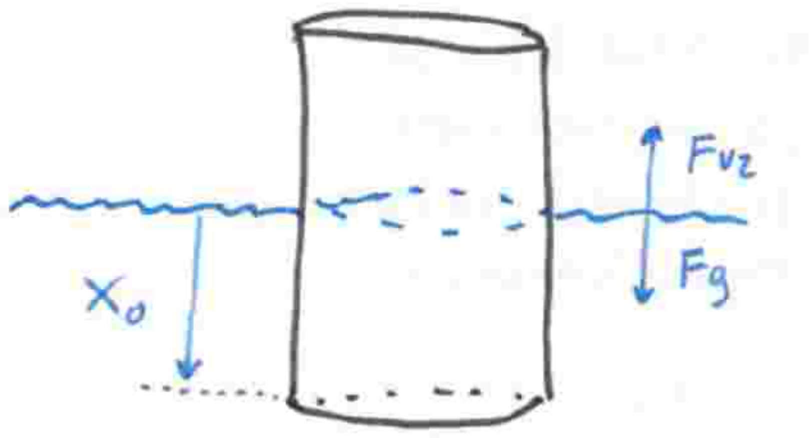
Pro $h \to +\infty$ je $gm\frac{Rh}{R+h} = g.m.R.\frac{h}{R+h} \to g.m.R$

Pozn.: pro $R \to 0$ je tato práce $W \to +\infty$, neboť nekonečně blízké hmotné body se přitahují nekonečně velkou silou.

FYZ. AP.

- Dřevěný plovák válcového tvaru s plochou základny $S = 4000\ cm^2$ a výškou $H = 50\ cm$ plave na povrchu vody. Jeho hustota je $\rho = 0.8\ g\,cm^{-3}$. Jakou práci je třeba vynaložit na jeho vytažení z vody? Jakou práci je třeba vynaložit na jeho úplné potopení?

$\{\rho_{H_2O} \doteq 1\ g\,cm^{-3}\}$



$$F_g = \rho \cdot V \cdot g = \rho \cdot S \cdot H \cdot g$$

$$F_{Vz} = \rho_{H_2O} \cdot S \cdot x \cdot g$$

$$x_0 : \quad F_g = F_{Vz}$$

$$\rho \cdot \cancel{S} \cdot H \cdot \cancel{g} = \rho_{H_2O} \cdot \cancel{S} \cdot x \cdot \cancel{g}$$

$\rho_{H_2O} = 1000\ kg\,m^{-3}$

$\rho = 800\ kg\,m^{-3}$

$H = 0.5\ m$

$S = 4 \times 10^4\ cm^2 = 4 \times 10^3 \times (10^{-2})^2 = 0.4\ m^2$

$$x_0 = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} \cdot H$$

Je-li potopeno pouze x z válce, potom na válec působí síla

$$F = F_g - F_V = \rho S H g - \rho_{H_2O} S x g = g \cdot S \cdot (H\rho - x\rho_{H_2O})$$

Práce je $W = F \cdot s$, zde se mění síla a tedy

VYTAŽENÍ: $dW = F(x)\,dx \Rightarrow W = \int_{x_0}^{0} g S (H\rho - x\rho_{H_2O})\,dx =$

$$= g \cdot S \cdot \left[H\rho x - \tfrac{1}{2}\rho_{H_2O} x^2 \right]_{x_0}^{0} = g \cdot S \cdot \left(\tfrac{1}{2}\rho_{H_2O} x_0^2 - H\rho x_0 \right) =$$

$$= g \cdot S \cdot \left(\tfrac{1}{2}\rho_{H_2O} \cdot \frac{\rho^2}{\rho_{H_2O}^2} H^2 - H \cdot \rho \cdot \frac{\rho}{\rho_{H_2O}} H \right) = g \cdot S \cdot \left(\frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho_{H_2O}} H^2 - \frac{\rho^2}{\rho_{H_2O}} H^2 \right) =$$

$$= -\frac{1}{2} g \cdot S \cdot \frac{\rho^2}{\rho_{H_2O}} \cdot H^2 = -\frac{1}{2} \times 10 \times 0.4 \times \frac{64 \times 10^4}{10^3} \times 0.25 \doteq -320\ J$$

POTOPENÍ: $W = \int_{x_0}^{H} -''- = g S \left[H\rho x - \tfrac{1}{2}\rho_{H_2O} x^2 \right]_{x_0}^{H} = \ldots = 190\ J$